Álgebra lineal I, Grado en Matemáticas

Segunda Prueba de Evaluación Continua, curso 2016/17

Espacios vectoriales

Ejercicio 1: (5 puntos) Dados los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^5$:

$$U \equiv \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad W = \{(a,\, a-2b,\, a+b,\, a-b,\, b) : \ a, b \in \mathbb{K}\}$$

(a) Determine una base y la dimensión de U.
(b) Determine unas ecuaciones implícitas y la dimensión de W.
(c) Halle una base del subespacio $U + W$.
(d) Halle la dimensión del subespacio $U \cap W$.
(e) Halle una base del espacio cociente $\mathbb{K}^5 / U$

Solución:

(a) Resolviendo el sistema lineal homogéneo $AX = 0$ que son las ecuaciones implícitas de U se obtienen unas ecuaciones paramétricas y de ahí una base. Tenemos $\operatorname{rg} A = 2$, luego $\dim U = 5 - 2 = 3$. El sistema es escalonado y tiene como incógnitas principales: x_1 y x_2; y las secundarias o parámetros $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$ y $x_5 = \gamma$. Las soluciones son

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \qquad\quad -\gamma \\ x_2 = \qquad 2\beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \qquad \beta \\ x_5 = \qquad\qquad \gamma \end{cases} \Rightarrow \quad U = L(u_1 = (1,0,1,0,0), u_2 = (0,2,0,1,0), u_3 = (-1,0,0,0,1))$$

(b) $W = \{a(1,1,1,1,0) + b(0,-2,1,-1,1) : \ a, b \in \mathbb{K}\}$, por lo que los vectores $w_1 = (1,1,1,1,0)$ y $w_2 = (0,-2,1,-1,1)$ son un sistema generador de W y al ser linealmente independientes, también son una base, es decir $\dim W = 2$. Unas ecuaciones implícitas de W se tienen de la condición:

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in W \text{ si y sólo si } \operatorname{rg}\{w_1, w_2\} = \operatorname{rg}\{w_1, w_2, x\}$$

Matricialmente

$$2 = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & -2 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & -1 & x_4 \\ 0 & 1 & x_5 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -2 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & x_3 - x_1 \\ 0 & -1 & x_4 - x_1 \\ 0 & 1 & x_5 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & -3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 0 & 0 & -2x_1 + x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & x_1 - x_3 + x_5 \end{pmatrix}$$

De donde se obtienen unas ecuaciones implícitas de W

$$W \equiv \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

(c) Un sistema generador de $U+W$ es $S=\{u_1,u_2,u_3,\, w_1,w_2\}$ y $\dim W = \mathrm{rg}\{S\}$. Estudiamos el rango utilizando la matriz de coordenadas por filas

$$\left(\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & u_2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & u_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & w_1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & w_2 \end{array}\right) \sim_f \left(\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & u_3+u_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & w_1-u_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & w_2+u_2 \end{array}\right)$$

En la segunda matriz tenemos un conjunto de vectores equivalente, y por ser las filas 3 y 5 iguales se tiene que $u_3+u_1=w_2+u_2$, entonces $u_3+u_1-u_2=w_2\in U\cap W$. Seguimos escalonando la matriz

$$\sim_f \left(\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & u_3+u_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & w_1-u_1-\frac{1}{2}u_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_2+u_2-u_3-u_1 \end{array}\right)$$

ya vemos que el rango es 4, y obtenemos una base de $U+W$ que está formada por los 4 primeros vectores.

(d) Ya hemos dado respuesta a este apartado con lo dicho anteriormente, pues $\dim(U\cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 1$ luego una base de $U\cup W$ es $\{w_2\}$.

(e) $\dim(\mathbb{K}^5/U) = \dim\mathbb{K}^5 - \dim U = 2$. Una base de este espacio vectorial será $\{v_1+U,\, v_2+U\}$, siendo v_1 y v_2 vectores que generan un suplementario de U en $\mathbb{K}^5$. Para obtenerlos basta ampliar una base de U hasta obtener una de $\mathbb{K}^5$. Si consideramos la base de U formada por los tres primeros vectores de la última matriz $\mathcal{B}_U=\{u_1,u_2,u_3+u_1\}$, basta añadir otros dos vectores de manera que formen una matriz escalonada. Nos sirven $v_1=(0,0,0,1,0)$ y $v_2=(0,0,0,0,1)$ para tener $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,u_3+u_1,v_1,v_2\}$ una base de $\mathbb{K}^5$.

Nota: Una opción mucho más trabajosa para obtener una base de $U\cap W$, pedida en el apartado (d), es juntar las dos ecuaciones de U y las 3 de W y resolver el sistema 5×5. ¡Compárese el trabajo necesario con el que se hace aquí! Un ejemplo de este método se tiene en la página 373 del libro (Ejercicio 5.3).

Ejercicio 2: (2 puntos)

Sea U el subespacio vectorial de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ definido por $U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) :\ a=d\right\}$

Determine un subespacio W suplementario de U que no contenga matrices singulares, salvo la matriz nula.

Solución: Si consideramos coordenadas respecto de la base canónica $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$, las matrices de U son $(a,b,c,d)_{\mathcal{B}}$, tales que $a-d=0$, por lo que esta última es una ecuación implícita de U y $\dim U=3$. Es fácil obtener 3 matrices linealmente independientes que formen una base de U, ya que sólo han de cumplir $a=d$:

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para encontrar un suplementario de U basta ampliar la base $\{A_1,A_2,A_3\}$ de U, a una base de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$, añadiendo una matriz $A_4=(a,b,c,d)_{\mathcal{B}}$ que no pertenezca a U, es decir $a\neq d$, y cuyo determinante sea

$ad-bc \neq 0$ (para que no sea singular). Hay muchas opciones, por ejemplo si tomamos $A_4 = (0,1,1,1)_{\mathcal{B}}$, entonces $W = L(A_4)$ es un suplementario de U en las condiciones pedidas. Las matrices que forman el subespacio W son de la forma

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) : \ b \in \mathbb{K} \right\}$$

Todas regulares salvo la matriz nula pues

$$\det \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & b \end{pmatrix} = -b^2 \neq 0 \ \Leftrightarrow \ b \neq 0$$

Observación: Nótese que $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ son linealmente independientes simplemente exigiendo $a \neq d$, pues en ese caso $A_4 \notin U$. No obstante, podemos confirmar que la matriz de coordenadas por filas tendría rango cuatro o determinante no nulo:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = d - a \neq 0$$

Ejercicio 3: (3 puntos)
Sea $V = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$ el conjunto de los números reales positivos. Demuestre que V es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, dotado de las siguientes operaciones:
Operación interna: el producto usual en $\mathbb{R}$.
Operación externa: $\lambda * x = x^{\lambda}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in V$.

Solución: Hay que comprobar que las dos operaciones dadas cumplen los 8 axiomas del espacio vectorial (Véanse páginas 89 y 90) .

Operación interna (producto de números reales)

1. Es conmutativo $x \cdot y = y \cdot x$ para todo $x, y \in V$

2. Es asociativo: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ para todo $x, y, z \in V$

3. Tiene elemento neutro: el $1 \in V$ ya que $1 \cdot x = x$ para todo $x \in V$.

4. Todo $x \in V$ tiene elemento opuesto, que es $\frac{1}{x} \in V$, de modo que al operar x con su opuesto se obtiene el elemento neutro: $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

Propiedades de la operación externa: $\lambda * x = x^{\lambda}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$

5. Asociativa: veamos si se cumple $\lambda * (\mu * x) = (\lambda \cdot \mu) * x$

$$\lambda * (\mu * x) = \lambda * (x^{\mu}) = (x^{\mu})^{\lambda} = x^{\mu \cdot \lambda} = (\lambda \cdot \mu) * x$$

6. Para todo $x \in V$ se cumple $1 * x = x^1 = x$.

7. Distributiva respecto de la operación interna:

$$\lambda * (x \cdot y) = (x \cdot y)^{\lambda} = x^{\lambda} \cdot y^{\lambda} = (\lambda * x) \cdot (\lambda * y)$$

8. Distributiva respecto de la suma de escalares

$$(\lambda + \mu) * x = x^{\lambda + \mu} = x^{\lambda} \cdot x^{\mu} = (\lambda * x) \cdot (\mu * x)$$